多変数関数

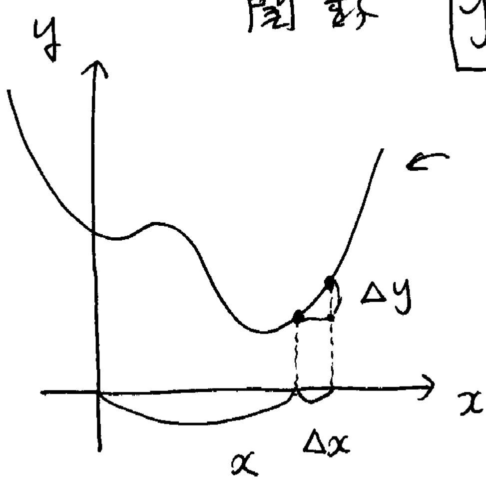
1. はじめに

・微分とは？

↓ 傾きである

但し、その点における傾き

関数 $\boxed{y = f(x)}$ 【xの値を決めると$f(x)$が決まる】



$$\boxed{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}$$

$$\boxed{傾き} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(定義)　　　Δxをゼロに近づける

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

(但し、Δxはゼロではない)

2. 偏微分

• 偏微分とは？

【定義】 $f(x, y)$ （2変数関数）を考える

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}$$

（yをとめて xで微分する事）

↑ ここでは yは定数だと考える

同様に

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}$$

◎ 偏微分は ただ それだけの事 である

⇕

何故必要なのか

↓

非常に便利である!!

【全微分と偏微分】

今　$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{f(x(t),\, y(t),\, t)}$ という関数を考える

x, y は　t の関数とする

（なぜから　$x(t)$，$y(t)$ と表記）

◎ 全微分　$\dfrac{df}{dt}$ の定義

$$\boxed{\frac{df}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t+\Delta t),\, y(t+\Delta t),\, t+\Delta t) - f(x(t),\, y(t),\, t)}{\Delta t}}$$

これは

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

と書く事ができる。

(証明) まず $\begin{cases} \Delta x \equiv x(t+\Delta t) - x(t) \\ \Delta y \equiv y(t+\Delta t) - y(t) \end{cases}$ と定義しておく

この時 $\Delta t \to 0$ で $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ である

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t}$$

を書き直す

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t+\Delta t), t+\Delta t)}{\Delta t} + \frac{f(x(t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t+\Delta t)}{\Delta t} + \frac{f(x(t), y(t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t} \right\}$$

右辺第1項は

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x, y(t+\Delta t), t+\Delta t)}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{f(x+\Delta x, y, t) - f(x, y, t)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

となっている

同様にして　右辺第2項は　$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}}$

右辺第3項は　$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial t}}$　となる。

よってまとめると

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

が証明された。

[例題]

$$f(x,y,t) = t^2 xy$$

但し $\begin{cases} x = \cos\omega t \\ y = \sin\omega t \end{cases}$ とする.

(a) $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= t^2 y(-\omega)\sin\omega t + t^2 x\, \omega\cos\omega t + 2txy$$

$$= -\omega t^2 \sin^2\omega t + \omega t^2 \cos^2\omega t + 2t\cos\omega t \times \sin\omega t$$

$$= \omega t^2 \cos 2\omega t + t\sin 2\omega t \quad //$$

(b) $$f(x,y,t) = t^2 \cos\omega t \sin\omega t = \frac{1}{2} t^2 \sin 2\omega t$$

よって

$$\frac{df}{dt} = t\sin 2\omega t + \omega t^2 \cos 2\omega t \quad //$$

両方の結果が一致している.

{ Note: $x(t)$, $y(t)$ が t の関数として具体的に
わかっている場合のみ (b) の計算が可能.
一般的には (a) で計算する }

3. 3次元空間での多変数関数

- 3次元空間 $(x, y, z) \equiv \mathbb{r}$
- その関数

$$f(x, y, z)$$

関数の傾き : $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

ここで $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ を導入する

ナブラ (nabla) という

$f(\mathbb{r})$ の傾きは

$$\nabla f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

↓ 物理では?

ポテンシャルを $U(\mathbb{r})$ とするとき

力 $\mathbb{F}$ は

$$\boxed{\mathbb{F} = -\nabla U}$$

となる

(a) Divergence (発散)

$$\nabla \cdot \mathbb{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

を divergence という

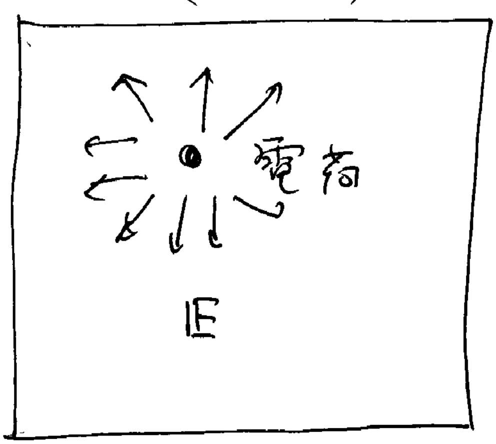
$(\mathbb{E} = (E_x, E_y, E_z))$

◎物理的イメージ

Gaussの法則

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbb{r})$$

(電場) (電荷密度)



電荷があると
そこから電場 $\mathbb{E}$
が生じる。

この図から 湧きだし のようにみえる

電荷 → ソース(源) という

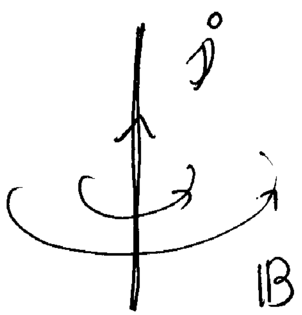
(b) Rotation (回転)

$$\nabla \times \mathbb{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z},\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x},\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

($\mathbb{B} = (B_x, B_y, B_z)$)

• Ampère の法則：

$$\nabla \times \underset{\uparrow\ (\text{磁束密度})}{\mathbb{B}} = \mu_0 \underset{\uparrow\ (\text{電流密度})}{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$$



$\left\{ \begin{array}{l} \text{電流が流れると} \\ \text{回りに磁場 } \mathbb{B} \text{ ができる} \end{array} \right\}$

この図から渦のようにみえる

↓

(回転)

(c) $\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

(Laplacian)

Δ : 物理で最もよくでてくる

微分演算子

↑

空間の回転に対し不変

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ (デカルト座標)

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

(極座標)

【例題】

$\nabla^2 \dfrac{1}{r}$ の計算

$\boxed{\nabla^2 \dfrac{1}{r} = 0}$ を示す。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r} = \left(\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{1}{r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial x} = -\dfrac{x}{r^3} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{1}{r} = -\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3x^2}{r^5} \end{cases}$$

よって $\nabla^2 \dfrac{1}{r} = -\dfrac{3}{r^3} + \dfrac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0$ //

11.

$$\boxed{\int_{|\mathbf{r}|<a} \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) d^3r = -4\pi}$$ を示す。

原点を中心とした半径 a の球内の積分

(証明)

$$I \equiv \int_{|\mathbf{r}|<a} \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) d^3r = \int_{|\mathbf{r}|<a} \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) d^3r$$

ここで数学の Gauss の定理

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, d^3r = \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$ を用いると

$$I = \int_S \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{e}_r \cdot r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

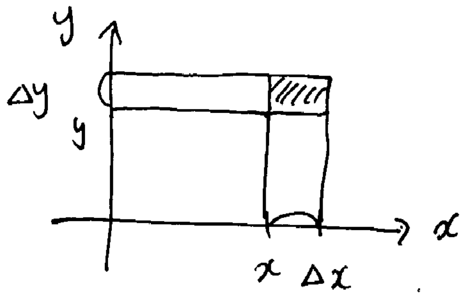
($|\mathbf{r}| = a$ とする)

$$= - \int_{|\mathbf{r}|=a} \frac{1}{a^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r\, a^2 4\pi = -4\pi$$

$$\therefore \int \left(\nabla^2 \frac{1}{r} \right) d^3r = -4\pi$$ が示せた。

4. 微小面積

微小面積　　$dx \cdot dy$



$$\boxed{\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y}$$ 微小面積

$\Delta x \cdot \Delta x = 0$, $\Delta y \cdot \Delta y = 0$ は自明.

面積に符号を考える

$$\Delta x \cdot \Delta y = -\Delta y \cdot \Delta x$$

(Grassmann 代数)

◎ Jacobian の計算

(a) 2次元　　$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

よって

$$\boxed{\begin{aligned} dx &= \cos\theta \, dr - r\sin\theta \, d\theta \\ dy &= \sin\theta \, dr + r\cos\theta \, d\theta \end{aligned}}$$

これより

$$dS = dx \cdot dy = (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)\cdot(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)$$

$$= r\, dr \cdot d\theta$$

Jacobian は $\underline{\underline{r}}$

(b) 3次元
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} dx = \sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi \\ dy = \sin\theta\sin\varphi\, dr + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi \\ dz = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \end{cases}$$

よって

$$dx \cdot dy \cdot dz = \left[\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\sin\theta + \cos^2\theta\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\sin\theta\right] \times r^2\sin\theta\, dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$= r^2\sin\theta\, dr \cdot d\theta \cdot d\varphi \quad //$$