

# 多変数関数

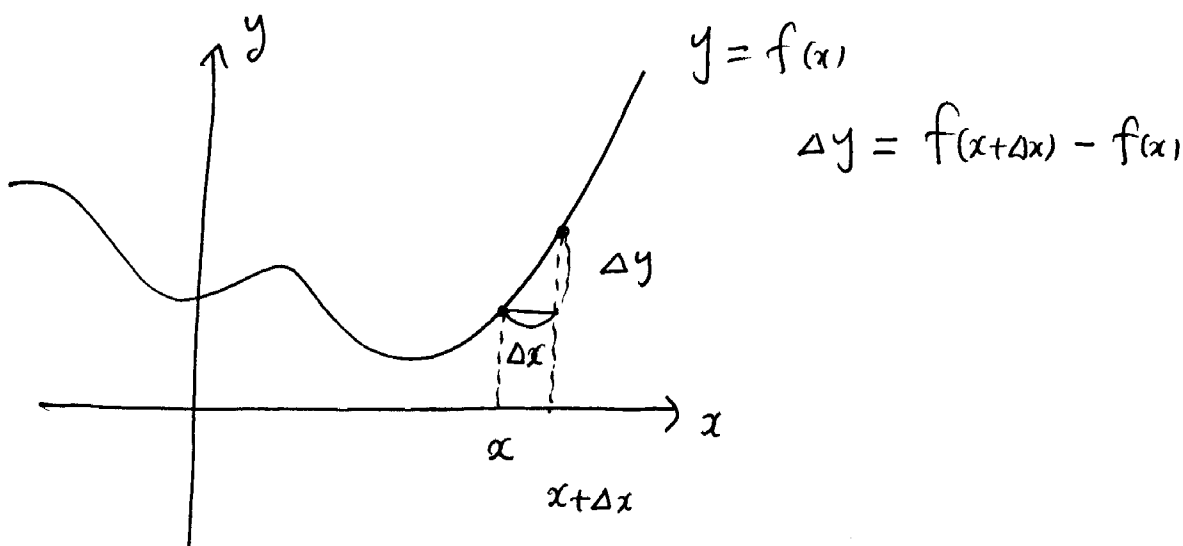
No. ....

Date .....

1. はじめに

1..

「微分とは何か？」

関数  $y = f(x)$  を考える[微分  $\equiv$  傾き]

$$(\text{傾き}) \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

 $\Delta x \in \mathbb{R}$  かつ  $\Delta x \neq 0$  として考える

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

## 2. 偏微分

2..

・ 偏微分とは何か？

【定義】  $f(x, y)$  を  $z$  とする。

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

↑  
偏微分  $\partial$

(  $y$  は  $z$  に対して定数  $a$  とおき、  
 $x$  だけ微分可なり )

同様にして

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

◎ 何故、偏微分が必要なのか？



この事が最も大切

$f(x(t), y(t), t)$  の関数と見なす

$x(t), y(t)$  は  $t$  の関数と見なす

この時

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

と見なす

微分係数からなる

(証明)

$$\frac{df(x(t), y(t), t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t}$$

と見なす

先(2)  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta x \equiv x(t+\Delta t) - x(t) \\ \Delta y \equiv y(t+\Delta t) - y(t) \end{array} \right.$

と定義(2)する

この時

$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ なら}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ と見なす}$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t+\Delta t), t+\Delta t)}{\Delta t} \right. \\ &\quad + \frac{f(x(t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t+\Delta t)}{\Delta t} \\ &\quad \left. + \frac{f(x(t), y(t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t} \right] \end{aligned}$$

と書けるからこのようになる。

222 右辺第1項：

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t+\Delta t), t+\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(x+\Delta x, y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x, y(t+\Delta t), t+\Delta t)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{と書ける。}$$

{ 同様 1212 右辺第2項:  $\frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$   
 右辺第3項:  $\frac{\partial f}{\partial t}$

243.

2, 2 4 3 2

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

加証明 244.

【例題】

$$f(x, y, t) = t^2 xy$$

$$\begin{cases} x = \cos \omega t \\ y = \sin \omega t \end{cases}$$

243.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \\
 &= t^2 y \cdot (-\omega) \sin \omega t + t^2 x \cdot \omega \cos \omega t + 2t xy \\
 &= -\omega t^2 \sin^2 \omega t + \omega t^2 \cos^2 \omega t + 2t \cos \omega t \sin \omega t \\
 &= \omega t^2 \cos 2\omega t + t \sin 2\omega t //
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad f(x, y, t) = t^2 \cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} t^2 \sin 2\omega t$$

$$\therefore \frac{df}{dt} = t \sin 2\omega t + \omega t^2 \cos 2\omega t //$$

(1), (2) の計算は一致 243 //

### 3. 空間は 3次元

No.

Date

6

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) \quad \text{と 2 変数 場合 が 多い}$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad \text{と 表 3}$$

○ 関数  $f(\mathbf{r})$  の 偏 導 関 数 :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{を 導 入 可 3}$$

ナブラ と いう  
~~~~~

この 時  $f(\mathbf{r})$  の 偏 導 関 数 は

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

と 書 け 3

[ ベクトル 表 記 は 覚 之 易 3  
計 算 は 成 本 心 や 子 才 心 ( 2 才 17 正 確 )

(a) Divergence (発散)

7...

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

ε divergence と呼ぶ

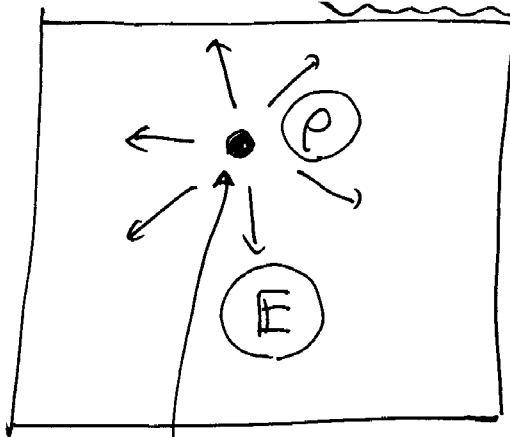
但し:  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$

Gauss の法則 (電磁気学):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(r)$$

↑ (電荷密度)

↓  
物理的な意味は何?



(電荷 ρ による源 (源) があるとそこから電場 E がつくられる)

この源の点を **湧き出し** と呼ぶ

(泉のよりにみえるから)

(b) Rotation (回転)

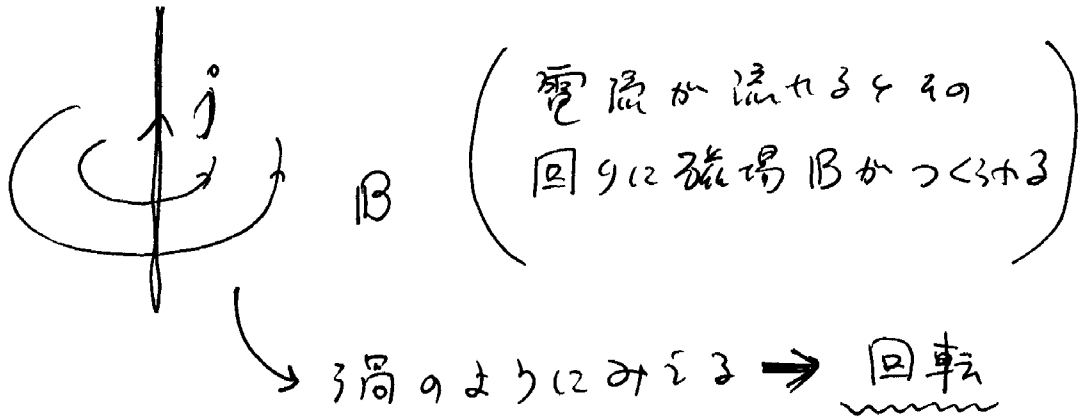
$$\nabla \times \mathbf{B} = \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

但し  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$

Ampere の法則:  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$

(電流密度)

物理の意味は何?





$$(c) \quad \Delta \equiv \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(Laplacian)

$\Delta$  : 物理で最もよく使われる  
微分演算子である。

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

[34]

$\nabla^2 \frac{1}{r}$  の計算 :  $\nabla^2 \frac{1}{r} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{r}$

$$\text{したがって} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \end{cases}$$

$x, y, z$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

したがって

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{r} = 0}$$

このが  $(\nabla^2 \frac{1}{r})$  は原点を中心とした半径  $a$  の  
球の中での積分すると

$$\int_{|r| < a} (\nabla^2 \frac{1}{r}) d^3r = -4\pi \quad \text{r243}$$

(証明)

$$I = \int_{|r| < a} (\nabla^2 \frac{1}{r}) d^3r = \int_{|r| < a} \nabla \cdot (\nabla \frac{1}{r}) d^3r$$

$$= \int_S (\nabla \cdot \frac{1}{r}) \cdot \mathbf{e}_r dS \quad \text{r243}$$

$$\text{r22 Gauss の定理} \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

$\mathbf{A} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_r$  とおくと

$$I = \int_S (\nabla \cdot \frac{1}{r}) \mathbf{e}_r \cdot a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= - \int_{|r|=a} \frac{1}{a^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r \cdot a^2 4\pi = -4\pi$$

よって 証明は完成 //

# 4. 微小面積

• 微小面積 [dx dy dz]



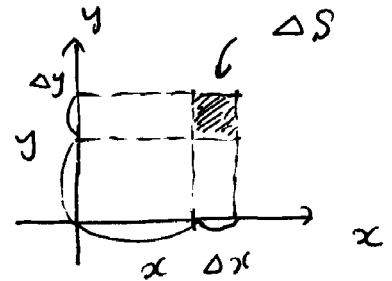
極座標 r, θ

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

とある

Jacobian とある

•  $\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y$  とある



とある

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta x &= 0 \\ \Delta y \cdot \Delta y &= 0 \end{aligned}$$

とある

積分の面積は符号も含む



$$\Delta x \cdot \Delta y = -\Delta y \cdot \Delta x$$

とある

$$\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y = -\Delta y \cdot \Delta x$$

(Grassmann 代数)  
とある

① Jacobian の計算:

$$(a) \text{ 2次元} : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

∴

$$\begin{cases} dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{cases}$$

∴

$$\begin{aligned} dS &= dx \cdot dy = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \cdot (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= r \cos^2 \theta dr \cdot d\theta - r \sin^2 \theta d\theta \cdot dr \\ &= r dr \cdot d\theta \end{aligned}$$

∴

Jacobian (2) r

$$(b) \text{ 3次元} : \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

∴

$$\begin{cases} dx = \sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi \\ dy = \sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi \\ dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{cases}$$

$$\therefore dx \cdot dy \cdot dz = r^2 \sin \theta dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$$