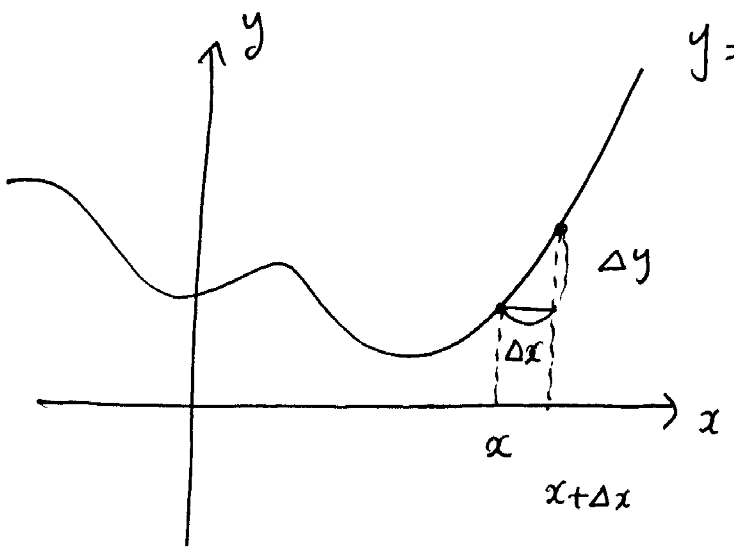
多変数関数

1. はじめに

「微分とは何か？」

関数 $y=f(x)$ を考える

［微分 ≡ 傾き］



$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$(\text{傾き}) \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Δx を限りなく0に近づける

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. 偏微分

・偏微分とは何か？

【定義】 $f(x, y)$ を考える

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}$$

偏微分という

（y を止めて（定数だと思って）
x で微分する事）

同様にして

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}$$

◎ 何故，偏微分が必要なのか？

↕

この事が最も大切

$f(x(t), y(t), t)$ という関数を考える

$\underline{x(t), y(t)}$ は t の関数とする

この時

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

とする

偏微分があらわれる

(証)

$$\frac{df(x(t), y(t), t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t}$$

である

先に
$$\begin{cases} \Delta x \equiv x(t+\Delta t) - x(t) \\ \Delta y \equiv y(t+\Delta t) - y(t) \end{cases}$$

を定義しておく

この時、 $\Delta t \to 0$ で

$$\begin{Bmatrix} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{Bmatrix}$$ である

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t+\Delta t), t+\Delta t)}{\Delta t} \right.$$

$$+ \frac{f(x(t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t+\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\left. + \frac{f(x(t), y(t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t} \right]$$

と書き直すことができる.

ここで 右辺第1項:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t+\Delta t), t+\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\underset{\begin{pmatrix}\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0\end{pmatrix}}{=} \frac{f(x+\Delta x, y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x, y(t+\Delta t), t+\Delta t)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$$

となる.

同様にして 右辺第2項 : $\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

右辺第3項 : $\dfrac{\partial f}{\partial t}$

となる.

よってまとめると

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

が証明された.

【例題】 $f(x, y, t) = t^2 xy$ $\begin{cases} x = \cos\omega t \\ y = \sin\omega t \end{cases}$ のとき

(1) $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial t}$

$= t^2 y \cdot (-\omega)\sin\omega t + t^2 x \cdot \omega\cos\omega t + 2txy$

$= -\omega t^2 \sin^2\omega t + \omega t^2 \cos^2\omega t + 2t\cos\omega t\sin\omega t$

$= \omega t^2 \cos 2\omega t + t\sin 2\omega t$ //

(2) $f(x, y, t) = t^2 \cos\omega t \sin\omega t = \frac{1}{2}t^2 \sin 2\omega t$

$\therefore \dfrac{df}{dt} = t\sin 2\omega t + \omega t^2 \cos 2\omega t$ //

(1), (2) の計算が一致している //

3. 空間は3次元

$f(\mathbb{r}) = f(x, y, z)$　となる場合が多い.

$\mathbb{r} = (x, y, z)$　である.

◎ 関数 $f(\mathbb{r})$ の傾き:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$ を導入する

ナブラという

この時 $f(\mathbb{r})$の傾きは

$$\boxed{\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$ と書ける

[ベクトル表記は覚え易い

計算は成分でやる方がはやくて正確]

(a) Divergence（発散）

$$\nabla \cdot \mathbb{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

を divergence と呼ぶ

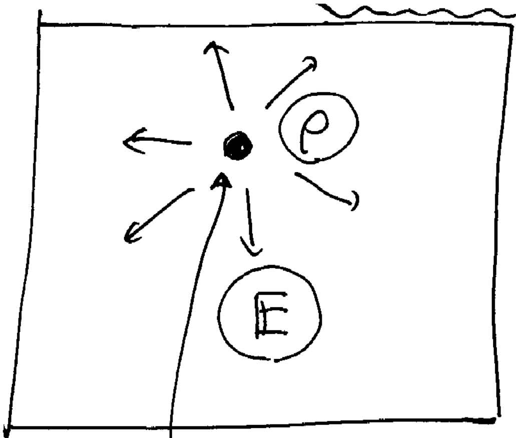
但し $\mathbb{E} = (E_x, E_y, E_z)$

Gaussの法則（電磁気学）：

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(r)$$

（電荷密度）

物理的な意味は何？



（電荷というソース（源）があるとそこから電場 $\mathbb{E}$ がつくられる）

この源のことを $\boxed{\text{湧きだし}}$ ともいう

（泉のようにみえるから）

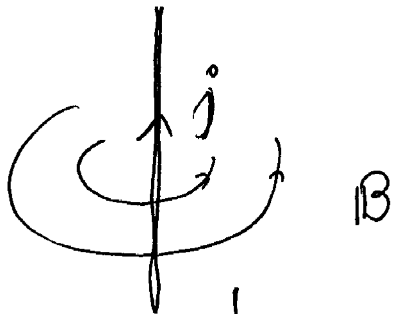
(b) Rotation（回転）

$$\nabla \times \mathbb{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z},\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x},\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

但し $\mathbb{B} = (B_x,\ B_y,\ B_z)$

Ampère の法則： $\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \underbrace{\mathbb{j}(\mathbb{r})}_{（電流密度）}$

物理的意味は何？



（電流が流れるとその回りに磁場 $\mathbb{B}$ がつくられる）

↳ 渦のようにみえる ⇒ 回転

(c) $\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

(Laplacian)

Δ : 物理で最もよくでてくる
微分演算子である.

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

[例] $\nabla^2 \frac{1}{r}$ の計算: $\nabla^2 \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r}$

ところが
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \end{cases}$$

よって

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0$$

すなわち $\boxed{\nabla^2 \frac{1}{r} = 0}$

ところが $\left(\nabla^2 \frac{1}{r}\right)$ を原点を中心とした半径 a の球内で積分すると

$$\boxed{\int_{|\mathbf{r}|<a} \left(\nabla^2 \frac{1}{r}\right) d^3r = -4\pi}$$

となる。

(証)

$$I = \int_{|\mathbf{r}|<a} \left(\nabla^2 \frac{1}{r}\right) d^3r = \int_{|\mathbf{r}|<a} \nabla\cdot\left(\nabla \frac{1}{r}\right) d^3r$$

$$= \int_S \left(\nabla\cdot \frac{1}{r}\right)\cdot \mathbf{e}_r \, dS$$

となる。

ここで Gauss の定理 $\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, d^3r = \int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$

を用いた。これより

$$I = \int_S \left(\nabla\cdot\frac{1}{r}\right) \mathbf{e}_r \cdot a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= -\int_{|\mathbf{r}|=a} \frac{1}{a^2} \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r\cdot a^2 \, 4\pi = -4\pi$$

よって証明された。//

4. 微小面積

• 微小面積 [$dxdydz$]

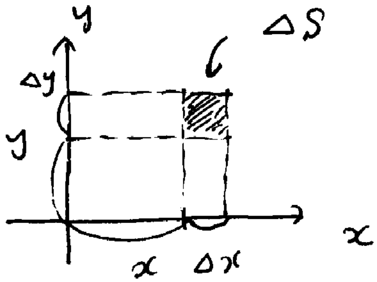
↓

極座標では

$$\boxed{dxdydz = r^2\sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}$$ となる

Jacobian という

• $\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y$ とする



ここで

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta x &= 0 \\ \Delta y \cdot \Delta y &= 0 \end{aligned}}$$ である

積分の面積は符号も含む

↓

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta y = -\Delta y \cdot \Delta x}$$

こうすると

$$\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y = -\Delta y \cdot \Delta x$$

(Grassmann代数という)

◎ Jacobian の計算：

(a) 2次元 ： $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

このとき

$$\boxed{\begin{aligned} dx &= \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ dy &= \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{aligned}}$$

よって

$$dS = dx \cdot dy = (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta) \cdot (\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)$$

$$= r\cos^2\theta\, dr \cdot d\theta - r\sin^2\theta \cdot d\theta \cdot dr$$

$$= r\, dr \cdot d\theta$$

よって Jacobian は $\boxed{r}$

(b) 3次元 ： $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

よって

$$\begin{cases} dx = \sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi \\ dy = \sin\theta\sin\varphi\, dr + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi \\ dz = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \end{cases}$$

これより $dx \cdot dy \cdot dz = r^2\sin\theta\, dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$ がわかる.