[特別講義] 電磁場中での荷電粒子の運動 12/15

Maxwell 方程式

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \mathbb{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} , \quad \nabla \cdot \mathbb{B} = 0 \\[2ex]
\nabla \times \mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \\[2ex]
\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \boldsymbol{i} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}
\end{cases}
$$

$\left.\begin{array}{l} \rho : \text{電荷密度} \\ \boldsymbol{i} : \text{電流密度} \end{array}\right\}$ 共に $(\mathbf{r}, t)$ の関数

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E} : \text{電場} \\ \mathbb{B} : \text{磁束密度} \end{array}\right\}$ 共に $(\mathbf{r}, t)$ の関数

◎ Maxwell 方程式は $(\rho, \boldsymbol{i})$ を与えたとき $\mathbb{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbb{B}(\mathbf{r},t)$ の形を決定する方程式である。

• ベクトルポテンシャル $\underline{\mathbb{A}(\mathbf{r},t)}$ とスカラーポテンシャル $\underline{\phi(\mathbf{r},t)}$ を導入

(a) $\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$ とおくと $\underline{\nabla \cdot \mathbb{B} = 0}$ は自動的に成立する

しかし 未知数は (B_x, B_y, B_z) 3つから (A_x, A_y, A_z) 3つと 減っていない!!

↳ このため $\mathbb{A}$ には 不定性 がある

(b) $\mathbb{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$ とおくと

Faradayの法則 $\nabla\times\mathbb{E} = -\dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$ は

自動的に成立している。

(証) $\nabla\times\mathbb{E} = \underbrace{-\nabla\times\nabla\phi}_{=0} - \nabla\times\dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbb{A}) = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \quad //$$

◎ ゲージ自由度 : $\mathbb{A}, \phi$ には不定性がある

$$\begin{cases} \mathbb{A} = \mathbb{A}' + \nabla\chi \\ \phi = \phi' - \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$$ とおいても

$\mathbb{B} = \nabla\times\mathbb{A}'$ とかけて $\mathbb{B}$ は不変

また $\mathbb{E} = -\nabla\phi' + \cancel{\nabla\dfrac{\partial\chi}{\partial t}} - \dfrac{\partial \mathbb{A}'}{\partial t} - \cancel{\nabla\dfrac{\partial\chi}{\partial t}}$

$$= -\nabla\phi' - \frac{\partial \mathbb{A}'}{\partial t}$$ となって不変

Maxwell方程式はゲージ変換に対して不変.

[電磁場中の荷電粒子の運動]

自由粒子の Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2$$

電磁場と相互作用すると Lagrangian はどうなるか?

ゲージ変換 $\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla \chi \\ \phi = \phi' - \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$ に対して

Lagrangian を不変にしたい

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - e\phi}$$ とする。

但し e は定数

このとき ゲージ変換に対して

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + e \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{A}' + \nabla \chi) - e\left(\phi' - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}' - e\phi' + e\left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla \chi + \frac{\partial \chi}{\partial t}\right)$$

ところが $\dfrac{d\chi(\mathbf{r}, t)}{dt} = \dfrac{\partial \chi}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial \chi}{\partial y}\dot{y} + \dfrac{\partial \chi}{\partial z}\dot{z} + \dfrac{\partial \chi}{\partial t}$

$$= (\nabla \chi) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$ より

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}^2 + e\dot{\mathbb{r}}\cdot\mathbb{A}' - e\phi' + \frac{d\chi}{dt}$$

Lagrangian に全微分の項 $\frac{d\chi}{dt}$ を足しても

Lagrangian方程式は不変

- この形の Lagrangian のみがゲージ変換に対して不変性を保つことができる

[荷電粒子の運動方程式]

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}^2 + e\dot{\mathbb{r}}\cdot\mathbb{A} - e\phi$$

粒子の運動方程式は

$$\boxed{m\ddot{\mathbb{r}} = e\mathbb{E} + e\dot{\mathbb{r}}\times\mathbb{B}}$$

となる

(註) 成分に分けて計算すること!!

x-成分だけやれば十分

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + e(\dot{x}A_x+\dot{y}A_y+\dot{z}A_z) - e\phi$$

但し $\left(\begin{array}{l} A_x(x,y,z,t),\ A_y(x,y,z,t),\ A_z(x,y,z,t) \\ \phi(x,y,z,t) \text{ となっている.} \end{array}\right)$

x についての Lagrangian 方程式：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + eA_x \right) = e\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - e\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

ここで $\displaystyle \frac{dA_x(\mathbf{r},t)}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}$

より

$$m\ddot{x} + e\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)$$

$$= e\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - e\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\therefore \quad m\ddot{x} = e\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + e\dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

$$- e\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

ここで $\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}$, $\mathbb{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$ より

$$m\ddot{x} = e\left(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y\right) + eE_x$$

$$= e\left(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbb{B}\right)_x + eE_x$$

これより

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\,\dot{\mathbf{r}} \times \mathbb{B} + e\,\mathbb{E}$$

が示された。