

量子力学 I 中間試験 (2) (2007.12.18)

学生番号 _____ 氏名 _____

1次元調和振動子のハミルトニアン \hat{H} は $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ である。
この時、オペレータ a, a^\dagger を次のように導入する。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p}$$

- (a) a, a^\dagger の交換関係 $[a, a^\dagger]$ を計算せよ。ただし、 $[x, \hat{p}] = i\hbar$ である。
- (b) 数演算子を $\hat{N} = a^\dagger a$ と定義する時、 $[\hat{N}, a^\dagger]$ を計算せよ。
- (c) \hat{N} の固有関数および固有値を ϕ_n, n とする ($\hat{N}\phi_n = n\phi_n$)。
この時、 $a^\dagger\phi_n$ も \hat{N} の固有関数になっている事を示せ。
- (d) \hat{N} の固有値 n の最小値は 0 であり、その固有関数は ϕ_0 である。
この時、 $a^\dagger\phi_0$ の状態に対して、 \hat{N} の固有値はいくらか？

(ヒント : 交換関係の定義は $[A, B] \equiv AB - BA$ である。
また、 $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ である。)