７月２４日に日立基礎研究所で行われるセミナーの原稿です。学生諸君には少し難しいかも知れないものですが、読んで理解するよう試みてください。量子力学 II の講義では、何回か量子化そのものの難しさを話しましたが、量子化に対する一つの新しい考え方だと思っています。

量子化のお話

日大理工物理　藤田丈久

[0] スピンと統計のお話 （付録）

[1] 量子化 (first quantization)

**** 量子化は正準か？ *****

[2] 量子化の原理

[3] 場の量子化 (second quantization)

[4] QED の繰り込み理論以降の理論物理

[於 日立基礎研究所（7/24）]

[0] スピンと統計

半整数スピンの粒子はフェルミオン

整数スピンの粒子はボソン

****

(a) 実験事実：

**** 電子は $\boxed{\text{スピンが } \frac{1}{2}}$ であり、フェルミオン**

**** 光 (photon) は $\boxed{\text{スピンが } 1}$ であり、ボソン**

これは、はっきりわかっている * しかし**

^{4}He− **原子はボーズ・アインシュタイン統計**
^{3}He− **原子はフェルミ・ディラック統計**

に従うという．これは、本当なのか ??

(b) **理論： 電子に関しては証明が可能**

** ** ** $\boxed{\text{複合系}}$**： これは全く不明** ** ** **

(c) **直感的な描像： 原子の物性は電子で決まる**

** ** ** **原子核のスピンが何故、影響するか？**

** ** ** **強磁場なら、原子核スピンの影響がある**
（Zeeman 効果）

** ** ** **磁場無しでも、統計物理に影響するか？**

$$\Downarrow$$

**** $\boxed{\text{統計力学で何か理解してない事がある！}}$

******* **実験で検証されるべき** *********

[1] 量子化 (first quantization)

** ** 量子化 $\Longrightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}}$

** ** 正準量子化 $\boxed{[x_i, p_j] = i\hbar\ \delta_{ij}}$

** ** しかし、これが正準 (標準) でない事は明らか

****

***** 簡単な解説 *****

極座標での自由粒子のハミルトニアン：

$$H = \frac{{p_r}^2}{2m} + \frac{{p_\theta}^2}{2mr^2} + \frac{{p_\varphi}^2}{2mr^2 \sin^2\theta}$$

ここで $p_r,\ p_\theta,\ p_\varphi$ は一般化運動量

*** この時、正準量子化は

$$[r, p_r] = i\hbar, \quad [\theta, p_\theta] = i\hbar, \quad [\varphi, p_\varphi] = i\hbar$$

** だとすると $\Longrightarrow$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)$$

****** これは正しくない (エルミートでない) !!!

**** 正しいハミルトニアンは勿論：

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hbar^2}{2mr^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)$$

[2] 量子化の原理

** ** $\boxed{\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}}$ は突然出てきたのか ??

******* 最も信用できるのは、$\boxed{\text{Maxwell 方程式}}$

(注： Maxwell 方程式は量子化されている！)

*** それと $\boxed{\text{ゲージ不変性}}$ ** これを原理にする

******* ゲージ不変性 とは何か？

****** $\boxed{\text{簡単な解説}}$ $\Longrightarrow$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

この式の未知関数は $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ の $\boxed{\text{６個}}$

方程式の数は、やはり $\boxed{\text{６個}}$ だから解ける

ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}, A_0$ を導入

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} A_0 - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

この時、Maxwell 方程式は

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} A_0 + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = -\rho \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{j} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{\nabla} A_0 + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) \tag{2}$$

この式は $\boxed{\text{３個}}$、未知関数は A_x, A_y, A_z, A_0 の $\boxed{\text{４個}}$

********* **数が合わない !!!** ***********

*** $\boxed{\text{ゲージ固定}}$ **(１個、未知関数を手で減らす)**

何故それで良いのか？ $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}, A_0$ は観測量でない

******** $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ **は正しく求まるのでＯＫ**

****** ゲージ不変性が $\boxed{\text{相互作用の形}}$ を決める *****

自由粒子の Lagrangian （古典力学）

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2$$

$\Longrightarrow$ **ゲージ不変な Lagrangian**

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 + g \left(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A} - A_0 \right)$$

$\boxed{\text{電磁場との相互作用の形が決まる}}$ (g **は定数)**

ゲージ変換: $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \xi(\boldsymbol{r}, t)$, $\quad A_0 \to A_0 - \dfrac{\partial \xi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}$

この時、Lagrangian は

$$L \Longrightarrow \;\; L = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 + g \left(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A} - A_0 \right) + \frac{d\xi}{dt}$$

となり、全微分項は影響しない $\Rightarrow$ **ゲージ不変**

**** $\boxed{\text{Maxwell 方程式とゲージ不変性}}$ から
**** $\boxed{\text{Dirac 方程式}}$を求める **********

Maxwell 方程式を与える Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = -gj_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad\qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Lagrange 方程式 $\qquad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \qquad$ より

Maxwell 方程式は

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = gj^\nu}$$

と求まる．これは、式 (1), (2) と全く同じ．

(注：以下の議論では $\hbar = 1, \quad c = 1$ としてある)

***** しかし、 $\boxed{\mathcal{L} = -g j_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}$

はゲージ変換で不変でない. $(j_\mu A^\mu)$ がゲージ依存

j_μ は物質のカレント密度.

$\boxed{\textbf{Lorentz 変換による対称性}}$ から

$\boxed{j_\mu = C_0 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi}$ と決まる. C_0 は g に繰り込む.

ここで、<u>**Lagrangian** 密度のゲージ不変性</u>を要求

ゲージ変換： $\boxed{\psi \to e^{-ig\xi}\psi, \quad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \xi}$

で不変であるためには

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu \gamma^\mu \psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu \psi A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

と決まる.

このLagrangian 密度に

**** $\boxed{\text{質量項}}$を加える（Lorentz スカラー量）

$$\boxed{\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}$$

**** 質量 $\boxed{\ m\ }$ は実験から決められるべき定数

このLagrangian 密度から Dirac 方程式が求まる

$$\left(-i\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\alpha} + m\beta - \frac{g^2}{r}\right)\psi = E\psi$$

$\boxed{\text{運動方程式が基}}$： $\Longrightarrow$ 量子化 $\boxed{\boldsymbol{p} = -i\boldsymbol{\nabla}}$ は結果

**** このため ****

$\Longrightarrow$ Klein-Gordon 方程式は導出できない！

$[3]$ 場の量子化

実験：水素原子の $2p_{1/2}$ から $1s_{1/2}$ への遷移

****** 光（電磁波）が作られる *******

** 場の量子化が必要 (参考になる理論はない！)**

******* 電磁場の量子化：**

$$\boldsymbol{A}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\lambda=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\boldsymbol{k}}}} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda) \left[c_{\boldsymbol{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\boldsymbol{k},\lambda}^{\dagger} e^{ikx} \right]$$

[$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{k},\lambda)$ **は偏極ベクトル, 分散関係式は** $\omega_{\boldsymbol{k}} = |\boldsymbol{k}|$]

$\boxed{\text{場の量子化}}$ **：** $\quad [c_{\boldsymbol{k},\lambda},\ c_{\boldsymbol{k}',\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}$

ベクトルポテンシャルがオペレータになった !!

$\Longrightarrow$ **従って、固有状態を用意する必要がある**

$\Longrightarrow$ **Fock 空間**

$\Longrightarrow$ **教科書：「Symmetry and its breaking in quantum field theory」**

（ 参照 ）

[4] QED繰り込み理論後の物理

(a) Wilson が証明した線形閉じ込め $\Longrightarrow$ 間違い
しかも、閉じ込めは QED での計算だった !!

(b) 南部－Goldstone ボソン $\Longrightarrow$ 存在しない
南部の計算：場の理論の真空の理解が不十分
ただし、カイラル対称性は自発的に破れる

(c) 繰り込み群 $\Longrightarrow$ 有限サイズ効果の予言である
結合定数 g が運動量スケール μ に依る事は無い

(d) QCDの摂動論は定義できない
$\Longleftarrow$ クォーク・グルオンの自由場がゲージ依存
$\Longrightarrow$ QCD の理解は３０年前に逆戻り !!

(e) 場による経路積分では場の量子化が出来ない
Feynman の原論文は場を正しく量子化している
$\Longrightarrow$ 格子ゲージ理論の数値計算は物理的に無意味